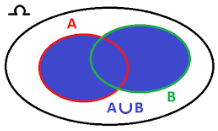
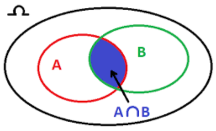
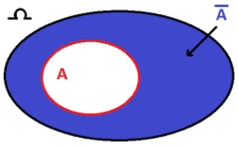
Dénombrement

I) *Cardinal d'un ensemble fini – Parties d'un ensemble.*

- Soit Ω un ensemble fini de n éléments, $\Omega = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$.
  L'entier naturel n est appelé **cardinal** de Ω. On note : $card\Omega = n$
- A et B désignent deux parties de Ω. On écrit : $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$
- $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$.
- Si A et B sont deux ensembles **disjoints** (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$) alors $card(A \cup B) = cardA + cardB$
- $\overline{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}$, est le **complémentaire** de A.
- $\overline{A} \cup A = \Omega$ *et* $\overline{A} \cap A = \varnothing$
- $card\,\overline{A} = card\Omega - cardA$







II) *Principe de produit ou principe fondamental de dénombrement.*

- **arbre de choix**
- **Principe de produit :** Si une expérimentation complexe peut se décomposer en p opérations élémentaires successives tels que :

- La **première** opération peut être effectuée de n_1 manières différentes.
- La **deuxième** opération peut être effectuée de n_2 manières différentes.
- La **troisième** opération peut être effectuée de n_3 manières différentes. Et ainsi de suite …
- La $p^{ième}$ opération peut être effectuée de n_p manières différentes.

Alors l'ensemble de toutes ces opérations peut être effectuées de $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times ... \times n_p$ manières différentes

III) *Arrangements et permutation d'un ensemble fini.*

- ***Arrangements sans répétitions.***

- ***Notion de factorielle*** : Soit n un entier naturel tel que $n > 1$

On appelle " ***n factorielle*** " le nombre entier noté $n!$ tel que $n! = n(n-1)(n-2)\times .....\times 3\times 2\times 1$

Par convention, on pose **0! = 1** et **1! = 1**.

- Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle arrangement de p éléments de Ω, toute suite de p éléments ***distincts*** de Ω. On le note A_n^p.

Il y a n façons de choisir le 1er élément, **(*n*-1)** façons de choisir le **2ème** élément, …, [*n*-(*p*-1)] façons de choisir le $p^{ème}$. et d'après le principe

Donc $A_n^p = n(n-1)(n-2).....(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \le n$.

$A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$.

- Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle ***permutation***, tout arrangement des n éléments de Ω.
  Il y a $n!$ permutations de Ω si les n éléments sont distinguables entre eux.

- ***Arrangements avec répétitions.***

C'est le nombre d'arrangements que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n éléments, chacun d'eux peut figurer **plusieurs** fois dans le même arrangement. Le nombre d'arrangements avec **répétitions** est n^p

N. B. :Quand il s'agit de classer k « objets », rangés en p groupes dont les éléments sont considérés comme indistinguables entre eux à l'intérieur de chaque groupe, il faut trouver le nombre de permutations distinctes de p objets quand k_1 sont d'une sorte, k_2 d'une autre, …, k_p de la $p^{ème}$ sorte, avec $k_1 + k_2 + ... + k_p = k$.

Ce nombre est alors : $\dfrac{k!}{k_1! \times k_2! \times ... \times k_p!}$.

IV) *Combinaisons d'un ensemble fini .*

Ω étant un ensemble à n éléments, on appelle **combinaison** de p éléments de Ω, toute partie de p éléments de Ω. On la note C_n^p telle que : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ / $1 \leq p \leq n$.

<u>**Formules usuelles**</u> **:** $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$

$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ **(*formule de Pascal*)** ; $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k . b^{n-k}$ **(*formule du binôme*)**

V) *Types de tirages.*

- La plupart des expériences aléatoires peuvent être interprétées comme des tirages de p boules d'une urne qui en contient n.
- Il y a **deux critères** pour distinguer ces tirages :
  1) **L'ordre** : Si l'ordre dans lequel on tire les boules est pris en considération, on dit que c'est un « tirage avec ordre », sinon c'est un « tirage sans ordre ».
  2) **La répétition** : Si on remet chaque boule tirée dans l'urne avant de tirer la suivante, on peut tirer plusieurs fois la même boule : on parle alors d'un tirage avec répétition ou avec remise. Dans le cas contraire on parle d'un tirage sans répétition ou sans remise.

Ω étant un ensemble à n éléments, On tire p éléments parmi n éléments, donc :

Type de tirage	*Ordre*	*Répétition*	*Nombre de tirages possibles*
Successif avec remise	**Pas important**	**Possible**	n^p
Successif sans remise	**Important**	**Impossible**	A_n^p $p \leq n$
Simultané	**Important**	**Impossible**	C_n^p $p \leq n$